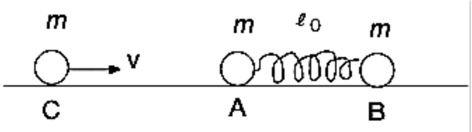
力学ICD演習解答例
演習10

1. 右図のように、質量 m の２つの質点A, Bが質量の無視できる自然長 l_0、ばね定数 k のばねでつながれていて、滑らかな水平の床の上に置かれている。質量mのもうひとつの質点Cをばねと同じ直線上左方から速さ vで弾性的に衝突させた。



以下の設問に答えよ。

(1) 運動量保存則とエネルギー保存則を使い、衝突直後のCとAの速度が、それぞれ、0とv であることを示せ。（衝突直後はBは無関係であることに注意。）

（解答例） 衝突後のCとAの速度をv'_C , v'_A とする。衝突前は$v_C = v$ 、$v_A = 0$ なので、運動量保存則より、

$mv = mv'_C + mv'_A$ …(a)、エネルギー保存則より、$\frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mv'^2_C + \frac{1}{2}mv'^2_A$ …(b)。 (a)より、$v'_C = v - v'_A$. これを(b)に代入し、$v^2 = v'^2_C + v'^2_A = (v - v'_A)^2 + v'^2_A$. これより、$2v'_A(v'_A - v) = 0$ なので、$v'_A = 0$ あるいは $v'_A = v$ となる。$v'_A = 0$ の時は $v'_C = v$ となるが衝突前の解なので、適当なのは $v'_A = v$ 、$v'_C = 0$となる。

(2) 衝突後のAとBを二体問題として扱う。衝突直後のAとBからなる系の重心の速度を求めよ。

（解答例） 重心の位置は $x_G = \frac{mx_A + mx_B}{m + m} = \frac{1}{2}(x_A + x_B)$ 、重心の速度は $\dot{x}_G = \frac{1}{2}(\dot{x}_A + \dot{x}_B) = = \frac{1}{2}(v'_A + v'_B) = \frac{v}{2}$.
ここで、衝突直後は$v'_A = v$ 、$v'_B = 0$ （Bは最初は静止している）であることを使った。

(3) 重心の座標 $x_G(t)$ をl_0, v, t で表せ。（衝突した瞬間を$t = 0$ 、最初のAの位置を原点とせよ。）

（解答例） 外力＝０なので、重心の速度は一定、すなわち常に $\dot{x}_G = v/2$ で等速直線運動する。

よって、$x_G(t) = \frac{1}{2}vt + x_G(0)$. ここで、$x_G(0)$ は$t = 0$ での重心の位置 $l_0/2$ なので、$x_G(t) = \frac{1}{2}vt + \frac{1}{2}l_0$.

(4) A、Bからなる系の換算質量 μ を求めよ。**（解答例）** $\mu = \frac{mm}{m + m} = \frac{m}{2}$

(5) （質点Aの上に乗ってBを見た）相対位置を$x = x_B - x_A$ とした時、相対位置に関する運動方程式を、x, k, l_0, m で表せ。**（解答例）** 6-1-2節より、相対位置に関する運動方程式は $\mu\ddot{x} = F$. ここで F は F_{BA} のことで、Bが受ける力である。したがって、$F = -k(x - l_0)$. 結局、$\frac{m}{2}\ddot{x} = -k(x - l_0)$. 整理すると、$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2kl_0}{m}$.

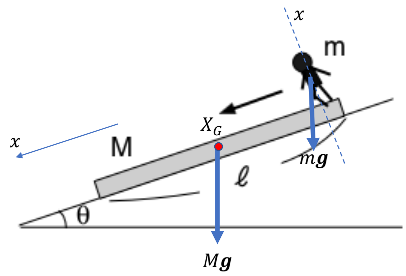
(6) 上で得られた微分方程式の一般解を求めよ。（hint: 非同次方程式の一般解は、同次方程式の一般解＋非同次方程式の特殊解となる（(6-2-20)を見よ））。**（解答例）** $\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2kl_0}{m}$ は非同次微分方程式の形をしている（惑星の運動を決める非同次微分方程式（6-2-17）参照）。最初に、右辺＝０なる同次方程式 $\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = 0$ の一般解 $x_h(t)$ を求める。同次方程式は単振動の式と同じであるから、$x_h(t) = A\sin\omega t + B\cos\omega t$ 、$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$ である。また、$\ddot{x} + \frac{2k}{m}x = \frac{2kl_0}{m}$ の特殊解 $x_p(t)$ は$x_p(t) = l_0$ であることはすぐにわかる。よって、求める一般解は、

$x(t) = x_p(t) + x_h(t) = l_0 + A\sin\omega t + B\cos\omega t$ となる。ただし、$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$.

(7) $x(0) = l_0$, $\dot{x}(0) = -v$ なる条件を考慮した時、解は$x(t) = -\frac{v}{\omega}\sin(\omega t) + l_0$ となることを示せ。ただし、$\omega = \sqrt{\frac{2k}{m}}$. **（解答例）** $x(0) = l_0$ より一般解の係数 $B = 0$, $\dot{x}(0) = -v$ より $A = -v/\omega$. よって、$x(t) = l_0 - \frac{v}{\omega}\sin\omega t$

(8) 結局、A、Bからなる系は、Cとの衝突後、どのような運動をするか。**（解答例）** ばねは 角振動数 ωで振動しながら、A、Bの重心が $v/2$ の速度でx軸正の方向へ等速直線運動をする。

2. 右図のように、水平面と角度θをなす滑らかな斜面上に、質量M、長さlの板があり、その上を質量mの人が走り下る。重心の運動方程式を使い、以下の設問に答えよ。ただし、重力加速度をgとする。



(1) 斜面に沿った座標軸を考え、重心の方程式をたてよ。

（解答例） 重心の運動方程式は $M_{tot}\ddot{\mathbf{r}}_G = \mathbf{F}^{ex}_{tot}$ （式(7-1-15)）である。

今、右図のように斜面上にx軸を取ると、この式は、$(M+m)\ddot{x}_G = Mg\sin\theta + mg\sin\theta = (M+m)g\sin\theta$ と書ける。ここで、x_G は板と人からなる系全体の重心である。よって、重心の運動方程式は、$\ddot{x}_G = g\sin\theta$. …(a)

(2) 板が滑り落ちないようにするには、人はどんな加速度で走れば良いか。

（解答例） 人の座標をx 、板の重心をX_G とすると、$x_G = \dfrac{MX_G + mx}{M+m}$ …(b) となる。全体の重心の加速度は

$\ddot{x}_G = \dfrac{M\ddot{X}_G + m\ddot{x}}{M+m}$ なので、(a)に代入すると、$\dfrac{M\ddot{X}_G + m\ddot{x}}{M+m} = g\sin\theta$ …(C) となる。

板が滑り落ちないとき、板の重心は静止しているので $\dot{X}_G = 0$ だから、$\ddot{X}_G = 0.$ この条件を(c)に代入すると、

$\dfrac{m\ddot{x}}{M+m} = g\sin\theta$ 、$\therefore \ddot{x} = \dfrac{M+m}{m}g\sin\theta$ の加速度で走れば良い。

(3) 前問の条件で、人が板の下端にたどり着くまでの時間を求めよ。

（解答例） 初速度がゼロ、加速度$a = \ddot{x}$ で t 秒走る時の走行距離が板の長さに等しいので、$l = \dfrac{1}{2}\ddot{x}t^2$. これより、

$$t = \sqrt{\frac{2l}{\ddot{x}}} = \sqrt{\frac{2ml}{(m+M)g\sin\theta}}$$

3. 質量m_1と質量m_2の二つの質点からなる系がある。これらの質点の運動方程式は、

$$\begin{cases} m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}^{ex}_1 \\ m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}^{ex}_2 \end{cases}$$

である。ただし、$\mathbf{F}_{12}, \mathbf{F}_{21}$ は内力、$\mathbf{F}^{ex}_1, \mathbf{F}^{ex}_2$ は外力である。それぞれの質点の運動量を$\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$、それぞれの質点の原点のまわりの角運動量を$\mathbf{L}_1, \mathbf{L}_2$, その総和を$\mathbf{L}_{tot}$ とする。また、外力による（原点のまわりの）それぞれの質点に対する力のモーメントを $\mathbf{N}^{ex}_1, \mathbf{N}^{ex}_2$、その総和を$\mathbf{N}^{ex}_{tot}$ とする。

(1) $\mathbf{L}_{tot}$ を $\mathbf{r}_1, \mathbf{r}_2, \mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2$ を使って表せ。

（解答例） $\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{L}_1 + \mathbf{L}_2 = (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{p}_1) + (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{p}_2)$

(2) $(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = 0$ である。この理由を述べよ。

（解答例） $\mathbf{r} = \mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ とおくと、$\mathbf{r}$ の向きは質点2から質点１に向かう方向である。一方、$\mathbf{F}_{12}$ は質点１から２に向かう方向を向いている。いずれも、質点間を結ぶ方向にあるので、それらのベクトル積はゼロになる。

(3) (2)の結果を使い、$\frac{d}{dt}\mathbf{L}_{tot} = \mathbf{N}^{ex}_{tot}$ となることを示せ。（内力に無関係。外力がゼロなら$\mathbf{L}_{tot}$ は保存する）

（解答例） $\dot{\mathbf{L}}_{tot} = (\dot{\mathbf{r}}_1 \times \mathbf{p}_1) + (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_1) + (\dot{\mathbf{r}}_2 \times \mathbf{p}_2) + (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_2).$ …(a)

$\mathbf{p}_1 = m_1\dot{\mathbf{r}}_1,\ \ \mathbf{p}_2 = m_2\dot{\mathbf{r}}_2,\ \ \dot{\mathbf{p}}_1 = m_1\ddot{\mathbf{r}}_1 = \mathbf{F}_{12} + \mathbf{F}^{ex}_1,\ \ \dot{\mathbf{p}}_2 = m_2\ddot{\mathbf{r}}_2 = \mathbf{F}_{21} + \mathbf{F}^{ex}_2$ を(a)に入れると、

$\dot{\mathbf{L}}_{tot} = (\mathbf{r}_1 \times \dot{\mathbf{p}}_1) + (\mathbf{r}_2 \times \dot{\mathbf{p}}_2) = \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}^{ex}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}_{21} + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}^{ex}_2$ となる。$\mathbf{F}_{21} = -\mathbf{F}_{12}$ であるから、

$\dot{\mathbf{L}}_{tot} = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{r}_1 \times \mathbf{F}^{ex}_1 + \mathbf{r}_2 \times \mathbf{F}^{ex}_2 = (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} + \mathbf{N}^{ex}_1 + \mathbf{N}^{ex}_2$ となる。前問より$(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2) \times \mathbf{F}_{12} = 0$なので、

$\dot{\mathbf{L}}_{tot} = \mathbf{N}^{ex}_1 + \mathbf{N}^{ex}_2 = \mathbf{N}^{ex}_{tot}$ となる。